Apéndice de aclaraciones de terminología conceptual de topología

A) En topología se estudian los conjuntos mediante sus subconjuntos. Si los subconjuntos usados cumplen unas propiedades con las operaciones de unión e intersección, decimos que tenemos una topología en el conjunto. La estructura formada por el conjunto y esa topología es un espacio topológico. Si no se dice nada se supone que se utiliza la topología habitual, formada por todos los subconjuntos. Es lo mismo, pero más profundo que una estructura o espacio algébrico formado por un conjunto y una o varias operaciones. La más sencilla es la aritmética, con la suma y la multiplicación. Le sigue el álgebra lineal de números y las x con las operaciones de suma y producto de letras, etc.

B) Se entiende por aplicación, en matemáticas o en teoría de conjuntos, toda asociación de elementos de un conjunto con los elementos del otro. Pero con una condición: todos los elementos del primero deben tener elemento asociado y sólo uno en el segundo. Si esto no se cumple, es una simple correspondencia. Si se exige que todos los del segundo estén asociados (es decir, sean imagen de alguno), se dice que es un aplicación exhaustiva o suprayectiva. Si se exige que las asociaciones sean uno a uno (es decir, que los elementos del segundo nunca son imagen del mismo del primero) se dice que es inyectiva. Si es suprayectiva e inyectiva, entonces es biyectiva. Una inyección es que el conjunto de partida se inyecta en un pedazo del segundo pero uno a uno; es el concepto de sumergirse en el segundo. Una supayección es que no queda ninguno del segundo sin formar parte de esa asociación, pero nada asegura que algún elemento del segundo no sea imagen de varios del primero. El concepto de función es la restricción de las aplicaciones a que al menos el segundo conjunto sean los números reales.

C) Ahora vamos a hacer aplicaciones entre distintos espacios topológicos, o sobre sí mismos, y ver qué pasa con las propiedades que se conservan y las que no. Un caso interesante es cuando los dos conjuntos son el mismo. Un objeto sumergido en un espacio es una aplicación de un espacio en sí mismo, de forma que al menos para los elementos de ese subconjunto del primero todos pasen inyectivamente al segundo. Pero debemos exigir algo más en esas aplicaciones para hablar de objeto.

D) El movimiento es una aplicación de un espacio en otro de forma que el objeto como subconjunto se haya movido a otros puntos pero manteniendo algo del objeto primero en su composición y no solo la inyección.

E) Cuando se hacen esas aplicaciones, la topología exige (ésta es la condición fuerte que la define) la continuidad entre puntos. Es decir, no sólo debe ser una inyección o biyección sino que además puede, o no, ser continua. Debe serlo para hablar de objeto. Continua quiere decir que los puntos próximos en el espacio de partida, o sus subconjuntos-objeto, deben ir a parar a puntos próximos en el segundo espacio. Próximos quiere aquí decir “tan próximos como queramos". Es decir, el espacio final o el objeto inmergido pueden perder la forma pero no hacer fracturas. Si se fractura o desconexiona, dicen los matemáticos, ya se ha roto. El corte a veces busca esto posteriormente.

F) Esta denominada deformación continua se refiere a que dos puntos cualquiera del primer espacio muy próximos acaban muy próximos en sus dos imágenes. Entonces decimos que es una aplicación continua. Los puntos no se han distanciado, aunque la forma del objeto o todo el espacio desaparezca. Si la aplicación continua es biyectiva se dice que es un homeomorfismo si además hay una aplicación continua inversa, del segundo espacio al primero, que también es continua y la composición de ambas deja al espacio o al objeto igual que estaba. Este concepto es análogo a los isomorfismos de espacios algebraicos. El homeomorfismo quiere decir que los dos espacios o los dos objetos tienen la misma **estructura topológica**.

G) Otra cosa más exigente, con la que se suele confundir esto en los libros de divulgación o en las definiciones rápidas, es que además ese paso de un espacio al otro, y los objetos internos si es el caso, no se haga de golpe sino de nuevo de forma continua. Se trata de una segunda continuidad añadida. Lo que se conoce como deformación continua en los libros de divulgación. Cada paso de deformación se hace mediante una aplicación distinta. Es decir, se deforma la taza para que acabe siendo un donut mediante una sucesión de aplicaciones continuas en el primer sentido, aplicaciones que a su vez son un nuevo conjunto de aplicaciones. Este conjunto de aplicaciones tomado como un nuevo espacio topológico cuyos elemento son las aplicaciones (no se pierdan aquí) se aplican a sí mismas otra vez mediante una nueva aplicación continua entre funciones, una función de funciones. La nueva aplicación además está indexada: cada elemento-aplicación está numerado del cero al uno pero con números reales. De manera que la cero es la que deja al espacio o al objeto igual y la uno la que lo deja como queríamos al final. Cada aplicación es un paso. El mejor ejemplo es cuando deformamos continuamente una foto de Windows o Mac estirando. Cada paso es continuo, pues deja la imagen sin roturas y los pasos son continuos, no deja dar saltos. A esa aplicación de aplicaciones se la denomina homotopía.

H) Dos espacios se denominan homotópicos si existe esa función de funciones. Es el caso de los lazos cerrados dentro de un plano proyectivo. El espacio es el plano proyectivo y los objetos los lazos. Podemos deformarlos como queramos, siempre que (primera continuidad) el lazo no se quiebre, y (segunda continuidad) sin saltos de deformación. Por eso un agujero es un serio obstáculo, ya que impide esa deformación continua de movimiento continuo. Fíjense que definimos el movimiento como la deformación homotópica.

I) Si tenemos dos espacios homotópicamente equivalentes, es decir, que se puede pasar de uno a otro con continuidad, implica que son homeomorfos.

J) El caso más sencillo de homotopía es que se puede pasar de una pastilla esférica a un punto dentro de ella. Es lo que se denomina una retracción. También un pedazo de tubo puede retraerse a sus dos bordes identificados en un círculo. Siempre que no haya agujeros se pueden hacer estas retracciones en las superficies en concreto.

Por contra, una banda de Möbius no puede retraerse a un punto, sólo puede retraerse a una línea, su borde. Esto es muy importante, pues nos diferencia lo esférico del a-esférico.

K) Una vez definido el movimiento como esa sucesión de funciones, si le exigimos que (como en el caso de las fotos de ordenador) mantenga las rectas estamos en geometría proyectiva. Si además la forma completa del objeto no puede cambiar estamos en geometría métrica.

L) Capten que si el movimiento lo definimos con la homotopía no caemos en la paradoja de Zenón. Esto es debido a que hemos dicho que las funciones del conjunto de la función de funciones es el intervalo [0,1] de números reales. Si fuese de números naturales o racionales, como creían los griegos, habría saltos y por tanto podrían no encontrase los dos movimientos, el de Aquiles y el de la tortuga.