

Estimad@s

Explicando el tema en un grupo de estudio capté las dificultades para leer la segunda parte del último ítem. Así que os hago una introducción rápida a la lógica. Veamos los pasos de construcción de un lenguaje formal.

1) Vocabulario de La Lógica

a) Una lógica formal se basa en unos "signos" sin significado alguno, que nosotros denominaremos letras para que quede más claro. Dichas letras forman un Alfabeto, llamémosle el conjunto X, le añadimos unas reglas de formación que indican lo que es una combinación aceptable, una "palabra", que denominaremos un Término. Todos los términos posibles será el conjunto Términos(X).

2) Sintaxis: Las expresiones

a) Ahora hay que añadirle algunos "conectores" para ligar los Términos(X) entre ellos. Como mínimo dos conectores, los otros habitualmente conocidos se podrán obtener de ellos. Por ejemplo, la negación y el implicador. Son las primeras operaciones, unaria la primera y binaria la segunda. Tenemos así las "frases" denominadas Fórmulas. Ahora construimos el conjunto de todas las posibles, conjunto Fórmulas(X). El conjunto de letras, términos y fórmulas lo denominamos Expresiones(X).

b) Pregunta: dada una expresión ¿podemos escribirla mediante los pasos a) y b)?, si sí es un **decible** teniendo en cuenta que no se diferencia "escrito" de "hablado" en la lógica (uno es isomorfo del otro) En el caso de que no, entonces es un **indecible**. Para Freud, masculino y femenino son indecibles escritos (en el Inconsciente) no indecibles hablados (en el preconscious).

3) Semántica: La verdad

a) Ahora a Expresiones(X) las valoramos, les damos un valor de verdad a cada una, V ó F, $V(X)$, lo que supone una semántica con dos valores únicamente o muchos en según qué lógicas. Da igual la valoración que hagamos, hay muchas posibles. Tenemos así la verdad como una función entre todas las Expresiones(X)¹ y el conjunto de los números naturales o el conjunto restringido $\{1,0\}$. Es el paso denominado por Aristóteles apofántico. La estructura que obtenemos es $\langle \text{Expresiones}(X), V(X) \rangle$ cuyos elementos son proposiciones, Proposiciones(X).

¹ Enunciados en lingüística.

4) Formalización: el cálculo

1.- La sintáctica

a) Ahora construyamos un cálculo, una formalización axiomática, para dicha lógica. Primero escogemos unas cuantas proposiciones de Proposiciones(X), entre 2 y 9 suele ser lo habitual. Las denominamos los axiomas y añadimos una o varias reglas de deducción de forma que, partiendo de esos axiomas y con las reglas de deducción, podamos obtener proposiciones a partir de otras; que podamos **deducir**. Atención, no decimos que podamos obtener todas las Proposiciones(X) con dicho cálculo.

b) Pregunta: dadas unas pocas proposiciones de Proposiciones(X), que denominamos hipótesis y que agrupamos en el conjunto A, ¿podemos con nuestro cálculo obtener en un número de pasos **finito**² la proposición q (sea ésta una cualquiera)? Atentos, las hipótesis se añaden a los axiomas y reglas del cálculo. En el caso de que sí, es lo que se denomina una demostración de q; o también se dice que q es **deducible** en nuestro cálculo a partir de A. También se dice que el conjunto de proposiciones que tomamos como hipótesis, A, implica³ sintácticamente a q. De lo contrario, q es un **indeducible**.

c) Pregunta: si no es necesario escoger ninguna hipótesis y sólo usamos el propio cálculo con sus axiomas y reglas de deducción ¿podemos deducir algunas proposiciones? Pues claro, y éstas se denominan *teoremas*. Entonces se dice que el conjunto vacío implica sintácticamente a los teoremas.

2.- La semántica

a) Ahora nos preguntamos si, dada una valoración concreta en Proposiciones(X) y dadas una hipótesis, el conjunto A, *que sean verdaderas en dicha valoración*, ¿también es verdad q? Si es que sí, se dice que A implica⁴ semánticamente a q, o que q es una *consecuencia* de A⁵. Es decir, al hacer la valoración ya se plantea la semántica así.

b) Dado que podemos hacer muchas valoraciones distintas, si A implica semánticamente a q en todas las valoraciones, entonces decimos que es una proposición *válida* o que es una *tautología*. Fíjense en la diferencia verdadera/válida. Una valoración es un caso para nosotros. Ya que un sujeto está sujetado a una en particular, de forma que lo que es verdadero para uno no lo será para otro, pero la doxa debe ser válida, es decir verdadera para todo el mundo⁶. Si q es una tautología se puede decir que el vacío la implica semánticamente ya que no es necesario ningún conjunto de hipótesis verdaderas para obtenerla como consecuencia.

² Una demostración.

³ No confundir esta implicación del metalenguaje con la operación implicador del lenguaje de Proposiciones(X).

⁴ Implicación de nuevo perteneciente al metalenguaje.

⁵ No confundir jamás consecuencia con el implicador; Lacan no es muy preciso con eso.

⁶ Es un hartazgo escuchar que la verdad del sujeto es particular; cuidado, la Doxa es válida, las valoraciones deben ser verdad sin ser particulares, y lo singular es sólo un aspecto relacionado con los niveles de la castración.

5) Ligazón sintáctico-semántica

- a) Una lógica se denomina coherente cuando si el conjunto de hipótesis A implica sintácticamente a q, entonces A también implica semánticamente a q.
- b) Una lógica se denomina adecuada, a la inversa, cuando si A implica semánticamente a q, entonces A implica sintácticamente a q.
- c) Una lógica se denomina consistente (sintácticamente) si no se puede obtener la contradicción como teorema.
- d) Si pensamos A como el conjunto vacío, entonces se demuestra que en una lógica coherente todos los teoremas son válidos.
- e) Una lógica adecuada implica que todas las proposiciones válidas son demostrables.

Nota.- La coherencia y la adecuación son la conexión entre verdad y demostrabilidad. Los teoremas se obtienen de las propiedades sintácticas y las tautologías de las propiedades semánticas

6) EL todo y sus problemas

- a) Una lógica es **decidible** en *validez*, o sea más del lado semántico, si podemos decidir, en un número finito⁷ de pasos, si cualquier q es válida o no.
- b) Una lógica es **decidible** en *deductibilidad*, o sea más del lado sintáctico, si podemos deducir, en un número de pasos finito, si cualquier q es un teorema o no.
- c) Dejamos para otra ocasión el paso a lógicas completas y consistentes.

7) Las Lógicas concretas y sus propiedades

a) Las lógicas de proposiciones (enunciados) son coherentes, adecuadas y consistentes. La lógica de predicados también, pero sólo la de orden uno. Es decir, la que cuantifica sólo individuos y no conjuntos o clases de individuos; clase machos y clase hembras, por ejemplo. Dicho de otra manera, si la proposición se subdivide en un objeto y un predicado, lo que obliga a añadir dos conjuntos a nuestra lógica (el universo del discurso y el conjunto de los predicados) obtenemos la lógica de predicados cuyo conjunto total es Predicados(X) y entonces todas las fórmulas formaran la estructura $\langle U, \text{Predicados}(X) \rangle$. Lógica que incluye la estructura de Proposiciones(X).

Entonces, si sólo hay relatores, funciones unarias que ligan objetos⁸ con un predicado, también se mantienen la consistencia, coherencia y decidibilidad,

⁷ Un algoritmo.

⁸ Los objetos son los cuantificados por los cuantificadores.

pero ¡ay! Si se pasa a funciones binarias que ligan clases⁹ de individuos con predicados, la decibilidad se pierde. O dicho de otra manera, las relaciones entre clases de individuos hace que falle el cálculo y no está asegurado que partiendo de los axiomas y el resto del cálculo se puedan demostrar todas las fórmulas válidas y ni que todos los teoremas deducibles sean válidos: existen proposiciones que involucran objeto y predicado que son **indecidibles** en un sentido o en el otro más arriba definidos.

b) Si en relaciones unarias sí que funciona, entonces ¿cuál es el problema? Pues como en psicoanálisis falla la *escritura* de una lógica unaria, la de la relación sexual, se sustituye por otra con el predicado contingente, Φ , diferenciando y articulando *escrito* y *hablado*. Una lógica unaria también, pero añadiéndole una nueva negación de la cuantificación que la convierte de nuevo en indecible, en la que utilizamos dos fórmulas indecidibles para cada uno de los lados: masculino y femenino. Lacan no vio la fórmula de salida para el lado masculino porque no diferenciaba claramente (en su época muchos lógicos se liaban con eso) los diferentes niveles entre los planos sintácticos y semánticos; por eso no cita a Tarski, que es el que comienza a distinguirlo con claridad. Hoy en día ya es cristalino. Por eso yo he echado mano de unas definiciones un poco caducas del año 75 que aclaran mejor las cosas.

⁹ Que son también cuantificadas, además de los objetos, por eso se denomina de orden dos.