Carlos Bermejo

DEFINICIÓN DE ESTRUCTURA TOPOLÓGICA EN TOPOLOGÍA GENERAL O CONJUNTISTA

Dado un objeto que definiremos como un conjunto de puntos, X, y definido el conjunto de las partes P(X) formado por todos sus subconjuntos posibles (que incluye a sí mismo y al conjunto vacío), se define una topología o estructura topológica, en dicho conjunto X, mediante una familia de sus subconjuntos $\mathfrak{I}$ (es decir que no es necesario cogerlos todos, aunque puede hacerse) que cumple las tres propiedades siguientes:

1ª- El conjunto X y el conjunto $\varnothing$ pertenecen a $\mathfrak{I}$.

2ª- La intersección de cualquier par de subconjuntos u y v pertenecientes a $\mathfrak{I}$, que será un conjunto, debe pertenecer obligatoriamente a $\mathfrak{I}$.

3º- La unión de cualquier número de subconjuntos de X que pertenezcan a $\Im$, que será un conjunto, debe pertenecer a $\Im$.

Estas tres propiedades a cumplir hacen que no-toda familia de subconjuntos sea una topología. En particular hay dos casos extremos de estructura topológica:

a) cogerlos todos, es decir $\Im = P(X)$. Es la topología denominada discreta.

b) coger sólo X y $\emptyset$, y recibe el nombre de topología burda.[1]

[1] Puede comprobarse fácilmente que cumple las tres condiciones. La intersección X con $\emptyset$, $X \cap \emptyset = \emptyset$, que pertenece a la familia. La unión X y $\emptyset$, $X \cup \emptyset = X$, que también pertenece a la familia.

Entre las dos topologías vistas, para cada conjunto, hay una serie de topologías que van desde la burda a la discreta. Teniendo en cuenta que, cuantos más subconjuntos cogemos, más “fina” es la topología. La discreta es la más fina de todas. Una de ellas es la llamada topología usual en el espacio cartesiano habitual de n dimensiones, R^n, en la que cada abierto es uno de los posibles subconjuntos de R^n de la forma (0,…..n-1). Es decir, cada abierto es un subconjunto definido por los números existentes entre n dados, 0 y n-1, pero sin contener ni 0 ni a n-1. La usual es un intermedio entre la discreta y la burda.

Insistimos que para un conjunto dado X hay varias topologías posibles según el grado de finura que exijamos.

Los conjuntos de la familia $\mathfrak{I}$, de la topología $\mathfrak{I}$, (que son subconjuntos de X, insistimos) reciben el nombre de los **abiertos** de $\mathfrak{I}$. Es decir, un conjunto abierto significa, por ahora, que es un conjunto que pertenece a la topología[2]. Tengan en cuenta que puede ocurrir que un subconjunto, en diferentes topologías posibles, sea un abierto en una topología y no serlo en otra[3]. Repetimos, un conjunto no es abierto o cerrado per se. Se define un conjunto como cerrado si su complementario frente a X es un abierto en la topología. De hecho, en una topología puede darse que un conjunto sea abierto (por pertenecer a ella) y cerrado porque su complementario también sea un abierto.

---

[2] No confundir, como es habitual, con ninguna idea imaginaria de apertura.

[3] Cuando Lacan define a lo Real como "un abierto entre el semblante, que resulta de lo simbólico, y la realidad tal como se sostiene en lo concreto de la vida humana", seminario *Encore* (Pág. 115, de la versión castellana) hace uso de este concepto con cierta precisión, aunque con alguna modificación.

Cuando tenemos un conjunto y una topología, al par de los dos lo llamamos un Espacio topológico. ET={X, $\mathfrak{T}$}. Es importante que se den cuenta que un espacio topológico es un conjunto de dos elementos: un conjunto y una topología en él. Es habitual en los trabajos Psicoanalíticos no diferenciar claramente entre conjunto y espacio topológico confundiendo el uno con el otro. Como hay varias topologías para un conjunto, implica que para un conjunto dado podemos construir diferentes espacios topológicos.

Insistimos, hablar de espacio supone ya una topología[4].

---

[4] Por ello, cuando en el seminario *Encore*, Lacan hace la reflexión de que en el espacio del goce, si la mujer es no-toda, (lógica fálica que no hemos visto), el obsesivo, al quererla toda, recorre en una sucesión temporal de las mujeres de una en una; lo que está supuesto es que esas unas son abiertos de una topología de ese espacio. Y ahora pueden entender que cada obsesivo tiene "su topología", dándose el caso de que algunos sean "muy finos" y deban recorrer a muchas, y otros muy "burdos" y sólo vayan con una y el vacío (sería importante ver qué correlato tiene: ¿misoginia?), es decir que el obsesivo que sólo va con una no contradice para nada a la teoría, como parece de entrada. Simplemente tiene la topología burda. Insistimos, lo importante no es el conjunto del goce sino el espacio del goce, es decir el conjunto y su topología.

Fíjense que hemos definido una estructura para el conjunto que sólo era un conglomerado de puntos; la topología es la estructura mínima de un conjunto. Esa estructura nos permitirá estudiar qué pasa con las transformaciones.

¿Qué estudia la topología conjuntista?

La topología es en el fondo una sub-geometría que estudia las transformaciones continuas de un objeto en otro objeto. Hoy en día se define también así una geometría. Lo importante es qué tipo de transformaciones para la topología: las llamadas transformaciones continuas. Lo que estudia es qué tipo de propiedades (los llamados invariantes) se mantienen en la transformación, es decir, qué tipo de características del objeto de partida se hallan también en el objeto de llegada. Y entonces podemos decir que para nosotros son el mismo objeto. No deja de ser definir relaciones de equivalencia; todos los objetos que tienen los mismos invariantes serán de la misma clase. Serán equivalentes como espacio y no como simple conjunto.

Definición de Transformación: es una aplicación del conjunto A (objeto definido como conjunto de puntos) en el objeto B (definido a su vez por un conjunto de puntos). Recuerden que una aplicación hace corresponder para todo punto del conjunto A uno y sólo uno del conjunto B. Pero no a la inversa, todo punto del conjunto B no tiene porqué tener un punto de A al que se le hace corresponder, y en el caso de que lo tenga no tiene porque ser sólo uno. Es decir, hay puntos de B que o no corresponden a ninguno de A o corresponden a varios. Es común definir los puntos de B que corresponden a alguno de A como un conjunto llamado la imagen de A, Imf(A).

Cuando se ponen condiciones a la aplicación en B (por ejemplo, que todos correspondan a alguno de A), la aplicación es exhaustiva. Si se pone la condición de que los que correspondan a alguno sólo pueden corresponder a uno, recibe el nombre de aplicación inyectiva (una inyección se denomina a veces, la sumersión=plongement). Lógicamente si es inyectiva y exhaustiva, es un aplicación de uno a uno y recibe el nombre de biyección.

¿Ven ahora, más rigurosamente, porqué una inmersión es diferente de una sumersión? La sumersión es una aplicación inyectiva, a cada punto del objeto-conjunto le corresponde uno y uno sólo del objeto-conjunto recipiente. Mientras que la inmersión no lo cumple, algunos puntos del objeto tienen el mismo (un ejemplo son las líneas de auto-atravesamiento) punto imagen en el conjunto-recipiente. Por otro lado, podemos decir que una inyección (sumersión) es una biyección del objeto a un subconjunto del conjunto-recipiente. Por eso indica Wappereau que no se debe jamás confundir un objeto con su inmersión.

En el caso de la topología, las funciones parten de espacios topológicos y van a espacios topológicos. Definición de continuidad en topología: una aplicación es continua si a puntos próximos en el objeto les hace corresponder puntos próximos en la imagen. Quiere decir que si elegimos dos puntos muy próximos en A, sus imágenes en B son tan próximas como queramos. Dicho con precisión se define de la siguiente manera: un aplicación entre el espacio A y el B es continua si la función inversa entre B y A (invirtiendo las flechas) hace que para todo subconjunto abierto de B su imagen inversa sea un abierto a A. Lo mismo puede definirse con subconjuntos cerrados.

No debe confundirse esta definición básica de continuidad con la mucho más elaborada en espacios métricos, la que estudiaron en el colegio. Continuidad, en ellos, quiere decir que si la distancia entre dos puntos de A, x e y, es $|x-y| < e$, con e tan pequeño como queramos, la distancia entre F(x) e F(y) es $|f(x)-F(y)| < d$. Con $d = f(e)$. Dicho en sencillo, elegidos dos puntos y vista su distancia, la distancia entre sus imágenes será un número que depende de e; por lo tanto, a puntos más próximos, es decir e muy pequeño, corresponden d muy pequeñas. Es lo que intuitivamente impide la rotura en el paso de un objeto al otro.

En espacios métricos se define la isomorfía como la función biyectiva entre los conjuntos y la estructura métrica definida en ellos.

Homeomorfismos

Podemos definir ahora las transformaciones entre espacios topológicos que nos interesan, más sencillas que la isomorfía, aplicaciones continuas y biyectivas. Es decir punto a punto y sin roturas. Pero además exigiremos que la transformación inversa, de B a A, definida como que al punto que le correspondía a un punto de A, le hacemos corresponder ahora, desde B, el mismo punto, también sea continua.

Primera aplicación[5] ; F: A ⇾ B; biyectiva y continua

Segunda aplicación; G: B ⇽ A; biyectiva y continua

Entonces decimos que hemos construido un Homeomorfismo[6]. Y esa es la transformación que nos interesa como invariante. Si en un espacio topológico entre dos objetos-conjunto podemos establecer un homeomorfismo, es que son el mismo objeto, aunque no la misma presentación imaginaria del objeto. Todas aquellas características que se mantienen bajo un homeomorfismo son los invariantes. Son características del conjunto que no dependen de su forma de presentación, siempre que entre los objetos haya una relación punto a punto y bicontinua (continua entre los puntos y los subconjuntos). No se debe

[5] Aplicación es sinónimo de función.

[6] Equivalente a nivel topológico de la isomorfía a nivel algébrico.

confundir con lo que en los libros de divulgación llaman deformación continua puesto que eso es mucho más exigente, es lo que se conoce como homotopía.

Para estudiar las aplicaciones entre objetos y saber si son homeomorfos, se define una topología en cada uno de los conjuntos, es decir se trabaja con los espacios. Entonces dado que los espacios están estructurados, podemos estudiar si hay una correspondencia entre los conjuntos y entre las estructuras topológicas.

Es así que también se define un homeomorfismo como una aplicación biyectiva en la que a todo abierto de la topología en A le corresponde un abierto en la topología en B. Dicho de otra manera, es una biyección entre los puntos y una biyección entre los subconjuntos, una biyección entre las dos estructuras definidas[7]. Es interesante darse cuenta de que según las topologías

---

[7] Por eso Lacan dice que cuando enuncia, "el Inconsciente está estructurado como un lenguaje", lo que enuncia es un pleonasmo, ya que identifica estructura y lenguaje, y por ende estructura e Inconsciente. Fíjense que además dice que la estructura es topológica, y además combinatoria. Esta combinatoria es la que permite la cadena significante, los simplex vistos; que a su vez tienen su estructura. Lo anterior para la intensión, para la extensión son poliedros con su estructura. Ahora lo que decimos es que esos poliedros son conjuntos y como tales pueden ser dotados de una estructura mínima, la topología tal y como la hemos definido. La dimensión de la palabra, con sus efectos de significación (grafo del deseo), se basa en esas estructuras unas encima de las otras. Entenderán por qué para la dimensión de la palabra usa la combinatoria, y sus extensiones de superficies. Pero cuando estudia el goce, desde el punto de vista de lo escrito, recurre a la estructura más elemental que está sosteniendo todo el

que se definan en los dos conjuntos, una aplicación determinada será homeomorfismo o no, es decir que no solo el conjunto de partida importa sino la estructura de la que le dotemos [8].

---

[8] Se entiende así por qué, con el mismo recurso de lenguaje, dos personas diferentes tienen capacidades diferentes de simbolización (sea para lo cognitivo o para el Inconsciente), pues no sólo interesa el conjunto sino la topología de la que dispone, y algunas son francamente muy burdas. Creo que para la clínica es un tema a tener en cuenta. Por ejemplo para las fijaciones de la líbido, que Freud decía que había individuos que se fijaban muy fuerte a un objeto, quizá no hay muchos más. A veces se les llama personas "plásticas" a aquellas que disponen de mucha variedad de objetos y relaciones. No lo explica todo, pero puede ayudar a entender una base que muchas veces se confunde con lo constitucional. Leer con este pequeño aporte *Duelo y melancolía* tiene un efecto esclarecedor.

Ahora definimos la homotopía no sólo como una aplicación continua entre espacios topológicos, sino que además el paso real de uno a otro se efectúa por una sucesión continua de funciones continuas. Es lo que se conoce como deformación continua. Por eso si hay un agujero imaginario o tórico en un espacio no hay manera de deformarlo homotópicamente en otro que no lo tenga. Los dos tipos de agujeros son fundamentales, ya que crean estructura.

Espacio compacto

Una de las propiedades de los espacios, que Lacan utiliza, es la de compacidad. Supongamos un subconjunto cualquiera de un espacio topológico X, y llamémoslo, S. Se llama un recubrimiento de ese conjunto S, a :

- Una colección de subconjuntos abiertos de X, (recordar que abiertos quiere decir que pertenecen a la familia que define la topología), llamados V_1, V_2, ..., V_n. Con las condiciones siguientes:

- Haciendo la unión de todos los V_n entre sí nos dará el conjunto S,

$\bigcup V_n$, que será un subconjunto de X, llamémosle Z,

- Z, será un recubrimiento de S, si y sólo si $S \subset Z$, es decir si S es subconjunto de Z.

Cuando los espacios topológicos están formados por un número infinito de puntos, es el caso de los formados por números reales, suele ocurrir que el conjunto de los recubridores, V_n, será normalmente infinito. El lo que Lacan llama, en *Encore*, el infinito.

Que un espacio X sea compacto implica que ese recubrimiento infinito de los V_n puede recubrirse con otro subrecubrimiento W_n, pero con n finito.

Quiere decir que cualquier subconjunto de ese espacio que puede ser recubierto con una colección infinita puede a su vez ser recubierto con una colección finita. Es lo que Lacan llama el paso a lo finito. Es decir:

$Z = \bigcup V_n$, puede ser recubierto, o mejor sub-recubierto, con otra colección $\bigcup W_n$, finita. Por ello dice Lacan que de ahí sale lo finito, una por una. Para ello ha definido el espacio, no el conjunto, del goce como compacto. Cuando el espacio está compuesto de números reales, decir que es compacto implica que entre dos puntos del espacio siempre hay otro punto y además que no tiene ningún poro entre los puntos.

Esa falta de agujeros[9] tiene como consecuencia que cualquier sucesión de puntos, cualquier recorrido, que tenga límite por sí misma y no diverja, lo tendrá en el espacio, ya que no le falta ningún punto al espacio. Dicho de otra

[9] De hecho, siempre que entre dos puntos existe otro punto también lo cumplen los conjuntos llamados densos, pero es una manera de definirla intuitivamente porque en los espacios densos hay huecos entre los elementos. Lo que hace compacto es la definición que aportamos. De hecho el conjunto de los números racionales (quebrados) es denso y, a mi entender, cuando Lacan habla del significante en la tópica del Inconsciente lo toma en ese sentido, es por eso que el goce, que parece representar con números reales (racionales + irracionales) es imposible de atrapar todo mediante el significante. Por ello siempre queda un resto "a" que va a tratar como un objeto mínimo e irreductible a lo racional. El falo imaginario faltante, -j, tampoco es racional, y a mi entender tampoco irracional sino un número imaginario o complejo. Es mi lectura de *Suvbersión del sujeto…*, que da cuenta de lo irreal, aspecto descuidado en el psicoanálisis. En cualquier caso son dos objetos (valores en su lógica) de orden distinto y de registros distintos que deben articularse bien.

manera: si L es el límite de una sucesión cualquiera, L pertenece al espacio. Si no perteneciera, aunque la sucesión tuviese límite no lo encontraría nunca dentro del espacio y no lo alcanzaría jamás. Lacan habla de serie y no de sucesión; les recuerdo que el límite de una serie es el límite de la sucesión de sumas parciales. Quiere decir que la sucesión de las acumulaciones de la serie converge. En nuestro caso, la serie de las significaciones deben sumarse, si no quedan como un pastiche inarticulado.

Con números reales, es decir en espacios construidos con ejes reales R^n, a la manera de los ejes cartesianos de dimensión n (tantos ejes como n, el espacio habitual es R^3) existe un teorema:

Teorema de Heine-Borel

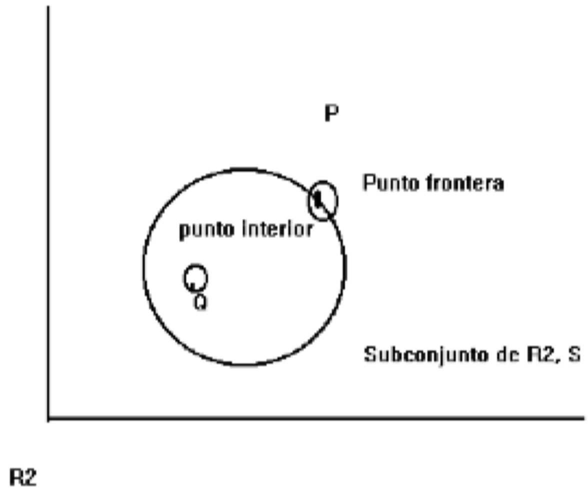
Todo subconjunto de R^n, cerrado y acotado es compacto. Acotado quiere decir que ninguno de sus puntos es mayor que un número dado, M, llamado cota superior. Todos los espacios que usa Lacan son acotados. Toro, banda, botella y plano proyectivo. Siempre los podemos encerrar en una esfera de radio M, que sería la cota. Es decir las variedades, que son las superficies de dimensión 2, y que son las que Lacan utiliza, pueden considerarse subconjuntos del espacio de 3 dimensiones. Hay que hacer una precisión. Ya que algunas de estas variedades, por ejemplo el plano proyectivo, al ser sumergidas en el espacio de 3 dimensiones se cortan a sí mismas, para considerarlas subconjuntos de R^3 debemos diferenciar la variedad, el plano proyectivo, que no es subconjunto de

R^3 sino de R^4, de su inmersión en R^3 que sí es subconjunto de R^3. Es la diferencia entre el objeto y una posible representación. El punto especial del plano proyectivo que Lacan nombra Φ, sólo existe en la inmersión del objeto (el cross-cap, que utiliza para representarlo) y no en el objeto mismo. Es sabido que Lacan quiso hacer un seminario sobre el objeto y la representación y no lo hizo. Hay ahí una cuestión de dimensión muy importante.

Cerrado quiere decir que su complementario frente al espacio R_n, es un abierto de la topología. Fíjense que, en principio, cerrado y abierto no se refieren a su significado habitual lingüístico.

En conjuntos de puntos reales, cerrado quiere decir que el subconjunto contiene a su adherencia; es un poco complicado pero veamos si lo podemos explicar intuitivamente.

Un subconjunto tiene una frontera; ella está formada por los puntos del borde que pertenecen al conjunto pero alrededor de ellos, en un pequeño círculo a su alrededor, hay puntos del conjunto y puntos que no. Ver dibujo:



El punto P, es un punto frontera, pues el pequeño círculo a su alrededor contiene puntos de S y puntos de afuera de S. Q es un punto interior, pues su pequeño círculo contiene puntos, todos pertenecientes a S.

Un conjunto cerrado es aquel que contiene a todos sus puntos frontera. Si al conjunto S le quitásemos la circunferencia que lo define y dejásemos sólo los puntos interiores, sería un conjunto abierto[10] pues no contiene su frontera. Intuitivamente, la frontera de un círculo es la circunferencia que lo envuelve.

[10] Abierto en la topología usual, la que no hemos explicado. Serían los subconjuntos de puntos pertenecientes a los círculos, en el caso de dos dimensiones, pero sin tener en cuenta los de la circunferencia, es decir todos los que contiene el círculo menos su frontera. En el caso de 3 dimensiones esferas sin la superficie de la esfera.

Al conjunto más su frontera se le llama la adherencia o clausura o cierre. Por ello Lacan habla del espacio fermé (cerrado) y borné (acotado o limitado) del goce. Los objetos: toro, botella de Klein, banda y plano proyectivo son cerrados, y como son acotados => son compactos.

Confío que les ayude. De todas maneras, una vez más, Lacan utiliza estos conceptos a su manera. Léanlo con cuidado, en particular la afirmación "no hay nada más compacto que una falla" en el capítulo primero de E*ncore*.