Esquema básico de lógicas

1) Lógica de enunciados (proposiciones)

Definiciones primeras

Un enunciado es una frase que puede tener valor de verdad o falsedad (valor apofántico). No toda frase u oración[1] lo tiene. En una teoría cualquiera sobre un real, los enunciados en principio tienen un valor de verdad empírico por experiencia o porque nosotros queremos que lo tengan. En lógica, de entrada, por ser una ciencia formal, todo queda abierto, de modo que en el conjunto de todos los enunciados, P(X), podemos asignarle a cada uno el valor de verdad que queramos. Si lo hacemos para todos ellos se denomina una valoración (primera semántica). Entonces, un enunciado dado es verdadero en una

[1] Suele decirse "frase" para el formato de la lengua y "oración" para el formato hablado. Es la terminología de Benveniste adaptada a nuestro caso. En el caso de lo escrito no hay un término apropiado, que sepamos. Por eso Lacan pasa del término Parole al del *decir*, entre otras cosas.

valoración y falso en otra. Recordamos que el valor de verdad de un enunciado es su valor semántico. Entiéndanlo bien: es su valor denotativo y no su significado. Aunque en lógica algunos autores llamen a la denotación “significado”, es una terminología que induce a error. Un enunciado tiene un significado, si lo tiene (denominado su “sentido”) y una denotación. La denotación es un objeto y en lógica ese objeto es lo verdadero o lo falso. Por eso Frege denomina al significado Sin (sentido o *sens* en francés) y a la denotación Bedeutung (liando un poco; pues debió haber dicho denotación y mantener Bedeutung para el proceso que se la otorga). También en las lenguas latinas se tradujo Bedeutung por significación. Pero que quede claro: significación es el proceso de adjudicarla, y lo que se adjudica en ese proceso es el objeto verdad o el de falsedad[2]. Por eso Lacan denomina efecto de sentido al significado (caso de la lengua) y significación a la denotación en *La Instancia de la Letra* y sólo al final de su obra traduce Bedeutung por denotación.

---

[2] Objetos a los que Lacan añade dos más (paramétricos, si quieren decirlo así): el objeto @ y el objeto -φ

Los enunciados, un signo complejo[3] si quieren decirlo así, se articulan entre ellos mediante una sintaxis especial formada por las funciones conectivas. Hay 16 conectivas si articulan dos enunciados. Si utilizamos paréntesis para establecer enunciados más complejos, con ellas podemos articular complejos de enunciados todo lo largos que queramos. Dado un complejo de enunciados podemos deducir el valor de verdad de dicho enunciado complejo utilizando no sólo el valor de verdad de los enunciados sino el *valor de verdad de las conectivas*. Este es conocido como el método semántico y veremos mas abajo que hay otro sintáctico. Las conectivas más conocidas son la implicación o la conjunción y la disyunción.

El valor de verdad o falsedad de las conectivas estará en función del valor de verdad de los enunciados simples. Se trata de las denominadas tablas de verdad. No confundir la valoración previa de los enunciados con el valor de verdad de las conectivas, sería como confundir el sentido de las palabras con el sentido de las frases en la gramática.

Fíjense que el valor de verdad de las conectivas es propio en función de la verdad o falsedad de los enunciados, luego el valor de verdad de las conectivas es independiente

---

[3] Están compuestos de signos más sencillos.

de la valoración previa que hayamos establecido para los enunciados. Es puramente semático o formal. Dice que si éste es falso y aquél verdadero su conjunción será tal o cual.

El valor de verdad de los enunciados es “su denotación lógica primera” y es opcional. En este caso se toman los valores de verdad como objetos simbólicos. Esto es muy importante para el psicoanálisis. Se suele dar un nombre a las conectivas más conocidas: implicador, conjunción y disyunción (no excluyente). Entonces se pueden definir las otras 16 en función de una de ellas, habitualmente el implicador, pero necesitamos algo más para hacerlo: la negación, que no es una conectiva[4].

La negación no conecta dos enunciados, simplemente construye otro que es su negación. Por eso suele definirse como un operador monario frente a las conectivas, que son operadores binarios.

---

[4] Por eso Freud nos introduce en un momento dado la partícula de la negación fuera del Inconsciente. Lacan, por su parte, nos introduce una definición del implicador como repetición. Ambos fuera del Inconsciente. Éste no hace lógica sino que trabaja. El Inconsciente trabaja sobre los discursos y sus implicadores.

Como hemos dicho, la lógica busca establecer cuál es el valor de verdad de cada conectiva en función del valor de verdad de los dos enunciados que conecta. Ésta es la verdadera verdad lógica. Una verdad en función de la articulación formal. Una vez establecido el valor de verdad de las 16 conectivas se puede obtener el de los enunciados más complejos, formados por muchos enunciados encajados y articulados mediante paréntesis con las conectivas y la negación.

Recuerden que Lacan empieza redefiniendo la negación para el significante, ofreciendo diferentes tipos, y no una sola, como en la lógica. La primera es una negación cuya negación de la negación no es la tesis primera. Lo hace indicando que un significante ya es una negación en sí mismo, negación de la cosa que se perdió[5], y que negar un significante no alcanza la cosa perdida en la primera negación que él mismo representa. La segunda es la negación propiamente dicha. En consecuencia con esa imposibilidad de alcanzar a la cosa[6], Lacan propone dos objetos más de "verdad denotativa": el objeto @ y -φ. El objeto @ le encaja con la lógica intuicionista, que tampoco acepta que la doble

[5] Freud lo vio cristalino y por eso al significante lo denomina representación-cosa.

[6] Cosa perdida que nunca estuvo. Sólo se siente como perdida cuando se la representa.

negación asegure la afirmación; es decir, no acepta el denominado "principio del tercero excluido". Los intuicionistas dicen que ahí en el medio, entre no-p y no-no-p "hay algo" que no saben qué es.

En ese "en medio" Lacan coloca el objeto @. La castración es un término que Lacan situará de forma no lógica, sino como una magnitud negativa, hasta que puede articularla con el S(Ⱥ) y la añade como un objeto negativo. También, a su manera, redefine el implicador convirtiéndolo en un conector entre significantes mediante la definición "un significante representa un sujeto para… (aquí sitúa el implicador psicoanalítico) otro significante". A veces lo denomina o denominamos "copulador". Hasta aquí la presentación semántica de la lógica.

Metalenguaje de la lógica de enunciados o proposiciones

Nos pasamos ahora a un poco de semántica pero a nivel metalingüístico, a la teoría sobre teorías. Proponemos una primera definición que suele costar entender bien y confunde a muchos. Dada una valoración cualquiera de P(X), podemos escoger un número de enunciados $E(X) \subset P(X)$. El signo $\subset$ es subconjunto. Si esos enunciados son ciertos en una valoración y entonces también lo es en esa valoración otro enunciado q, entonces decimos que q es una *consecuencia* de E(X). Es decir, en la valoración que son verdaderos E(X) también lo es q. Muchas veces E(X) recibe el nombre de hipótesis H(X). Se hace así porque ese conjunto de enunciados queremos que sean verdaderos para algunas circunstancias de uso de esa lógica[7]. Atentos, *es una consecuencia, no una deducción*. Es decir, se da y ya está, no se deduce de nada. En algunas valoraciones será una consecuencia y en otras no lo será. Se escribe así: $H(X) \vDash p$. Del conjunto H(X) de hipótesis se obtiene como consecuencia p.

También recibe el nombre de *implicador semántico*, o también se dice que "H(X) *implica semánticamente* a p". Que no debe confundirse nunca con el implicador o implicación material, que es otra cosa. La implicación semántica es una tesis del metalenguaje[8] y no del lenguaje de la lógica.

---

[7] Los escogemos con esa valoración porque en una lógica, o en una disciplina que queremos construir o aplicar, nos conviene que sea así formalmente o porque sabemos que son verdaderos empíricamente.

[8] La lógica aplicando sobre la lógica misma.

Una definición más que suele dar problemas de comprensión: se dice que una proposición es *válida* cuando es verdadera *per se* en todas las valoraciones posibles. También se la denomina una *tautología*. Otra manera precisa de decirlo es que una tautología es implicada semánticamente por el conjunto vacío de hipótesis. No se necesita condicionarla a ninguna hipótesis para que sea verdadera. Lo cual se escribe así en el metalenguaje de la lógica: $\varnothing \vDash p$. El conjunto vacío implica semánticamente a cualquier tautología.

La lógica presentada en su aspecto sintáctico

en su aspecto sintáctico. Ahora estructuremos la lógica de enunciados de otra manera, al modo axiomático, tal como Euclides lo hizo con la geometría (lo que en Aristóteles empezó siendo la silogística y después da este paso). Primero tenemos que establecer el concepto de *deducción o demostración*. Partimos de un pequeño y mínimo conjunto de enunciados que forman un subconjunto de P(X), $A(X) \subset P(X)$. Consideramos *verdaderos* estos enunciados por intuición y experiencia y los denominamos axiomas. Necesitamos al menos una regla de inferencia, de obtención de una conclusión a partir de las premisas (formadas por enunciados) y usando los axiomas. Obtendremos, tras formar un

enunciado todo lo complejo que queramos con las conectivas y la negación, las sustituciones sintácticas (enunciados que pueden ser utilizados y añadirse al proceso de forma que se considera apropiada).
No deben confundirse nunca las conectivas con las deducciones, es un error grave muy habitual en los autores psicoanalíticos. Ya está demostrado que con sólo la negación y una conectiva (habitualmente el implicador[9]) es suficiente para escribir todos los enunciados complejos. Y también se pueden explicar las reglas de deducción partiendo de una sola. Se suele escoger sólo un silogismo: El *modus ponens* es el habitual.

Si $p \rightarrow q \wedge p$ es verdad, entonces q es verdad[10]. A veces escrito así:

$$\frac{\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ p \end{array}}{q}$$

[9] Recuerden que Freud define la negación y Lacan el implicador, entre significantes y con el objeto.

[10] $\wedge$ es la conjunción "y".

Más conceptos básicos del metalenguaje en la lógica aplicados a la lógica de enunciados

Ahora supongamos que deseamos presentar una lógica de forma que todos los enunciados se obtengan de unos pocos primeros y que los demás sean deducibles de ellos. A este pequeño conjunto de enunciados que consideramos *válidos* en cualquier caso es a los que hemos denominado más arriba axiomas. Además se puede añadir, si se quiere, cualquier otro conjunto de enunciados que consideramos válidos por la razón que sea, debido a su interés u obtenida su verdad empíricamente, para cada teoría concreta en la que se usa esta la lógica, y los denominamos, como hemos hecho más arriba, hipótesis. Los axiomas se pueden utilizar en cualquier deducción en toda lógica; las hipótesis sólo en esa teoría o teorías concretas. Entonces una deducción o demostración de un enunciado se obtiene a partir de un conjunto de enunciados, axiomas, y en su caso hipótesis, aplicando las conectivas y la regla de deducción (a veces denominada "regla de inferencia").

Un enunciado se debe poder deducir (demostrar) en un número ***finito*** y no muy largo de pasos. En cada paso se debe establecer una cadena de implicaciones desde uno o varios axiomas o hipótesis hasta llegar al que quiere ser demostrado. Esta cadena está formada por enunciados de esta forma: $P_{k-1} \rightarrow P_k$. Fíjense que el proceso es análogo al de los pasos para resolver ecuaciones, sólo que cada línea ahora no es una igualdad sino una implicación y cada línea no es teóricamente igual a la anterior sino que es implicada por ella. Cada paso utiliza un axioma, una hipótesis o una regla de inferencia para formar un enunciado implicativo tal como lo hemos definido más arriba[11]. Recuerden que no tenemos definido el axioma de identidad.

Supongamos que queremos deducir q. El proceso es una sucesión de enunciados, aplicando esas "reglas sintácticas" con los axiomas e hipótesis, de forma que al final queda $p_n \to q$.

En el metalenguaje se indica o define como: "q es *deducible* del conjunto de hipótesis H(X)" y evidentemente los axiomas, y se escribe así: $H(X) \vdash p$. Es una definición puramente formal y que se basa en la "sintáctica". Algunos autores utilizan el término "decible"[12] en vez de decidible, pero nosotros no. Porque decible para nosotros es que

[11] Es un poco impreciso decirlo así pero no queremos complicarlo excesivamente.

[12] Nosotros preferimos guardar "decible" para lo que puede simplemente ser hablado o dicho y utilizar deducible para las cuestiones de eso con la verdad. Y más tarde diferenciarlo de lo escribible.

se puede "decir" y no por ello deducir. *Es para mantener la distancia entre el Habla y la Escritura*.

Vayamos a otra definición que suele entenderse mal: si una proposición puede demostrarse a partir sólo de los axiomas, decimos que es un *teorema* de dicha lógica. Y metalingüísticamente se dice que el conjunto vacío de proposiciones implica sintácticamente a q, y se escribe así: $\varnothing \vdash q$. No olvidemos que la mayoría de las veces, cuando aplicamos la lógica a otro campo del conocimiento, además de los axiomas se debe añadir una serie de hipótesis (enunciados que por alguna razón consideramos verdaderos) y entonces obtendremos más deducciones sintácticas además de los teoremas. Por contra, los teoremas dependen sólo de los axiomas y la regla de inferencia.

No se debe confundir añadir hipótesis con el hecho de aplicar una lógica a otra disciplina, como metalenguaje de ésta, y traspasarle su estructura. Es lo que se conoce como uso semántico sobre un modelo. Es una segunda semántica y que suele denominarse simplemente semántica. En esa aplicación semántica es cuando se utilizan otras terminologías para ese paso semántico, aunque algunos términos se utilizan de nuevo y uno debe saber que estamos no en el metalenguaje de la lógica sino de toda la lógica, con su metalenguaje incluido, aplicando a los enunciados de otra disciplina. Ahí es cuando aparece el concepto de satisfacibilidad y refutabilidad que de momento no explicamos aunque lo hacemos más abajo. El esquema de las dos semánticas encabalgadas sería éste:

Metalenguaje de la lógica

Lógica

Disciplina concreta

Toda la lógica como Metalenguaje de la disciplina

Volvamos al metalenguaje de la lógica de nuevo. Una lógica está formada por el conjunto de proposiciones o enunciados, otro conjunto de valoraciones posibles y la teoría de demostraciones o deducciones tal como la hemos definido. Suele presentarse también como un grupo de enunciados que se consideran verdaderos siempre, denominados axiomas, y otro grupo de enunciados verdaderos denominados hipótesis que son las que queramos que también sean verdaderas cuando nos convenga en “nuestra lógica”. Ahora trataremos tres conceptos fundamentales: consistencia, coherencia, y adecuación.

Conceptos metalingüísticos sobre las lógicas como teorías

La *consistencia*. Supongamos que en una valoración cualquiera tenemos que un enunciado es verdadero o falso; podemos preguntarnos si haciendo deducciones (equivalente a demostraciones) desde un conjunto cualquiera de enunciados (axiomas, añadiendo hipótesis o no) podría ocurrir que dedujéramos tanto que ese enunciado cualquiera q y su negación (o viceversa) fuesen verdaderos los dos a la vez. Es decir, un enunciado cualquiera q es verdadero y falso a la vez en esa valoración. Eso sería un desastre porque cualquier deducción para llegar a él podría darnos que es verdadero o falso según cómo hagamos la deducción.

Si aparece esa posibilidad se dice que esa proposición es *inconsistente*. Ahora, el salto al metalenguaje. En consecuencia, toda lógica (y por ello toda valoración) en la que eso pueda ocurrir, aunque sea con un solo enunciado, es inconsistente y no nos sirve. Debe ser imposible que eso ocurra. Si eso es imposible diremos que es una lógica consistente. También se suele definir indicando que de lo falso no puede nunca deducirse un teorema. Las lógicas incompletas, que veremos cuando veamos la lógica de predicados, son de utilidad pero las inconsistentes no sirven para nada[13]. En la inconsistencia, de lo falso se deduce la verdad de todo enunciado[14].

La coherencia. Una lógica es coherente si cuando se cumple que sí se da una implicación sintáctica, $H \vdash p$, se cumple que también se da la implicación semántica, $H \models p$. Si eso se cumple entonces, tiene la propiedad deseable de que los teoremas son siempre verdad[15].

---

[13] Decían los lógicos, hasta que apareció la lógica fuzzy. Aunque antes aparecieron las paraconsistentes e incluso lo niveles de consistencia o grados de consistencia.

[14] Eso es la definición de la política.

[15] Fíjense que si no fuese así, un teorema puede ser falso en la valoración. No hay que confundir la sintáctica con la semántica de la verdad.

La *adecuación*. Una lógica es adecuada si cuando es verdadera una implicación semántica, H $\vDash$p, también es verdad la implicación sintáctica, H$\vdash$p. En consecuencia, tiene la propiedad deseable de que las proposiciones válidas (siempre verdaderas) son demostrables.

Tesis importante: está demostrado ya que la lógica de enunciados es consistente, adecuada y coherente.

Una propiedad a destacar por su relación con la topología es la *compacidad*. Si de un subconjunto de enunciados verdaderos, A(X)[16], se puede obtener la consecuencia semántica de que p es verdadero, obtener la implicación semántica, A $\vDash$p, puede ocurrir que de un subconjunto **finito** de A que denominamos A_0 también se implique semánticamente p, o p sea consecuencia de A_0, $A_0 \vDash$p, entonces se cumple el teorema de compacidad. Otra manera, en este caso en la lógica y no en la topología, de pasar de lo infinito a lo finito. En la lógica de enunciados o proposiciones sí que se cumple.

[16] Que puede ser infinito.

Algunas propiedades importantes sobre la consistencia

1º.- Nos puede interesar saber si una parte de P(X), un subconjunto, es consistente o no. Puede escogerse un subconjunto del conjunto de predicados ya valorados y se define ese subconjunto de P(X), sea B(X) tal que B(X) $\subset$ P(X), como *subconjunto consistente* si de él no puede deducirse nunca lo falso[17]. Siempre que no nos salgamos de él estamos en la consistencia. Pero puede ocurrir que sea el máximo subconjunto consistente. Es decir, que sea denominando como subconjunto consistente maximal, porque B(X) es consistente y todo otro subconjunto de P(X), C(X), que contenga a B(X) como subconjunto es inconsistente.

Una manera mejor de definir un subconjunto maximal es decir que cumple tres propiedades. La primera, no se puede deducir de él lo falso, (ser consistente). La segunda, contiene todas las deducciones que se pueden obtener de él. La tercera, dado cualquier enunciado de P(X) o éste pertenece a B(X) o lo hace su negación. De esta manera P(X) puede no ser consistente, o sí, pero un subconjunto suyo lo puede ser, y si es

[17] Es una manera muy condensada de decir que no puede deducirse la verdad de una proposición y la de su negación.

maximal quiere decir que cualquier otro subconjunto que lo contenga será inconsistente; de ahí lo de maximal. Entonces todo subconjunto consistente será subconjunto de un subconjunto maximal. Entiéndase entonces que si P(X) fuese consistente, él sería su propio subconjunto maximal y único.

2º.- En este nivel semántico del metalenguaje de la lógica aplicada a ella misma, aparece el primer uso del término satisfacible. Es un término que une consistencia y verdad semántica. Un enunciado se denomina satisfacible si es verdadero en al menos una valoración (o una interpretación cuando aplica a otro campo) de nuestra lógica[18]. Ahora liguémoslo a la consistencia de un subconjunto. Se demuestra que si un subconjunto, B(X), es consistente existe una valoración de P(X) en la que todos los enunciados que pertenecen a B(X) son verdaderos: es decir satisfacibles. Es una definición que liga una propiedad formal o sintáctica con una propiedad semántica. De estas propiedades de un subconjunto consistente podemos extraer la conclusión de que al menos una parte de una lógica puede ser consistente sin serlo para todas las valoraciones. Además, esta

[18] Lo contrario de satisfacible es refutable. Refutable quiere decir que no es satisfacible en ninguna valoración (interpretación). De ahí que siempre falso.

propiedad fue la que seguramente hicieron creer a Hamilton que debería poderse demostrar la completud del los sistemas lógicos que expondremos más abajo.

La equivalencia semántica

Otra definición es la de equivalencia semántica entre dos proposiciones; es cuando el valor de verdad de una proposición es el mismo que el de la otra en todas las valoraciones. Y se escribe así, $p \Bumpeq q$, que en el fondo es la doble implicación semántica. Eso sí, hay que entenderlo bien: $\{p\} \vDash q \wedge \{q\} \vDash p$. Dicho con palabras, el conjunto que contiene sólo a la proposición p implica semánticamente a q y el conjunto que tiene sólo a la proposición q implica semánticamente a p. La equivalencia semántica hace que se pueda definir una relación de equivalencia (congruencia) en P(X), es decir establecer el conjunto de las clases en las que están todas las proposiciones que son equivalentemente semánticas. Ese conjunto de clases se denomina un álgebra de Lindembau. De modo que podemos operar con aquellas que son equivalentes como si fuesen la misma proposición desde el punto de vista semántico.

A modo de ejemplo, muchas veces los sujetos dicen: "si esto es verdad, esto otro lo será siempre" y se basan en esa equivalencia semántica. No se trata de un implicador. Es decir cada elemento que pertenece a la misma clase tiene el mismo valor de verdad que todos los que pertenecen a su clase. Esto se ve bien cuando alguien dice: "esta tesis para mí es igual que esta otra" aunque no tenga el mismo sentido, y no ofrece deducción ni demostración alguna, ambas son verdaderas y equivalentes en verdad.

La propiedad de la decibilidad (deductibilidad)

Hemos hablado de consecuencias, deducciones, valideces y teoremas, pero lo hemos hecho desde un punto de definiciones sincrónico y no diacrónico, en nuestro lenguaje. Hemos dicho que si se cumple tal cosa entonces lo denominaremos de tal manera. Ahora hay que encontrar la manera de comprobar que se cumple esa propiedad de la definición para concluir que se puede aplicar la definición. Es decir, hay que encontrar un procedimiento (algoritmo) para comprobar que se cumple de forma efectiva lo exigido por la definición para poderla aplicar donde toque o queramos. Podemos comprobar si una proposición es una consecuencia o es deducible de un conjunto de axiomas, añadiendo o no hipótesis no sólo postulándolo sino construyendo la forma de demostrarlo. Además pero queremos saber si lo podemos hacer con todas las que son válidas y teoremas.

Una lógica es *decidible en validez* si existe un algoritmo *finito* para demostrar si cualquier proposición es o no válida. Una lógica es *decidible en deductibilidad* si existe un algoritmo finito para decidir si una proposición es un teorema o no lo es. Es decir, una cosa es afirmar una propiedad "si ocurre esto implica que ocurrirá esto otro" y otra encontrar el algoritmo que la demuestra y que sea posible hacerlo *finitamente*. Esto se ha exigido mucho más desde el intuicionismo o constructivismo aunque Hilbert ya lo exigía en su programa de rigorización formalista de la lógica, que exige encontrar la manera de hacerlo y no sólo afirma que es así. Además, si no es finito no es computable por una máquina.

Diferentes conceptos y definiciones de completud

Ahora damos un salto al concepto de *completud*. Es un "salto al todo" en nuestra jerga. Vamos a ampliar las exigencias de coherencia y adecuación. Debemos definir la *completud semántica y sintáctica*, que son dos tipos de completud distintos, radicalmente distintos.

Supongamos que tenemos nuestros axiomas y la regla de deducción. *Completud semántica* quiere decir que se puedan obtener de ellos, mediante deducción, todas las fórmulas válidas o, equivalentemente, deducir todas las consecuencias de unas premisas dadas. Fíjense que es cercana a la exigencia de adecuación, no se trata ahora de que si hay implicación semántica haya implicación sintáctica, sino de que se puedan obtener o demostrar <u>todas</u> las que se saben válidas. Es decir, que del sistema formal S que hayamos construido en esa lógica (axiomas, valoraciones, reglas de inferencia, etc.), si K es el conjunto de las fórmulas válidas (siempre verdaderas) entonces todas son demostrables, o dicho de otra manera, todas las fórmulas válidas (verdades lógicas)[19] pueden ser implicadas sintácticamente (deducirse) de S. La lógica de proposiciones que acabamos de ver y la de predicados que más tarde veremos son semánticamente completas. Incluso Gödel demostró que el cálculo de predicados más el axioma de identidad también es semánticamente completo. A partir de ahí empezaron los problemas conocidos de los

[19] Si no hay hipótesis añadidas a los axiomas, el asunto aún es más claro.

teoremas de Gödel, problemas que tratamos mínimamente ahora: de todas maneras enlazamos una página informativa relativamente comprensible:

https://es.wikipedia.org/wiki/Metalógica

La falta en la lógica y por ende en las matemáticas[20]. Los trabajos de Gödel

Gödel, para la lógica de predicados de primer orden, probó el teorema de compacidad, que volvemos a explicar un poco más extensamente. Un conjunto de fórmulas es *satisfacible*[21], verdaderas en una valoración, si y sólo si lo es cada uno de sus subconjuntos finitos. Una vez más, el paso de lo infinito a lo finito. Hilbert, matemático y lógico, fue quien propuso demostrar esas completudes (sintácticas) y consistencias (no bastaba con postularlas como definición, exigía el paso a la demostración o deducción

[20] Recordamos que las matemáticas son para los formalistas una lógica más el axioma de identidad y desde ahí añadir los números.

[21] Si al menos una de ellas no lo es, entonces decimos que es refutable, y en consecuencia tampoco sería (o serían) válida(s).

finita). Fíjense cómo en todos los niveles teóricos se busca salir de los procedimientos infinitos.

La *completud semántica fuerte* es que si una proposición es implicada semánticamente por un conjunto de proposiciones, entonces también es implicada sintácticamente; esto coincide con lo que hemos definido como una lógica adecuada. Pero exige además que exista el proceso de deducción para demostrarlo o deducirla: es deducible o demostrable.

También podemos definir mejor la *completud sintáctica*. Para toda fórmula bien formada del sistema, o bien su afirmación es un teorema o lo es su negación. Dicho de otra manera, existe una demostración de ella o de su negación, escrito así para una proposición cualquiera: p es un teorema o lo es no-p. Escrito, $\emptyset \vdash p \lor \emptyset \vdash \neg p$. De los axiomas, sin hipótesis añadidas, o se deduce p o se deduce $\neg p$.

Lo que interesaba más a los formalistas (Hilbert) era la completud semántica y la consistencia cuando el sistema era presentado en forma axiomática. Ello debido a que la presentación de una teoría[22], presentada de forma semántica, es decir, de su conjunto de proposiciones verdaderas, es siempre completa y consistente. Lo que ahora interesaba era presentarla axiomáticamente: un conjunto de axiomas más las reglas de deducción. Hilbert seguramente pensaba que, porque la completud semántica se sigue o se obtiene de la satisfacibilidad de toda fórmula consistente, sería posible que las estructuras lógicas pudieran ser semánticamente completas y consistentes. Veremos más abajo que no.

Mezclemos un poco más sintáctica y semántica. En un sistema formal o una lógica, si es sintácticamente completa, podemos decidir para todas las fórmulas no sólo si son verdaderas, sino si son teoremas. Desde la deducción, si existe una que no es posible deducir entonces tenemos un indecidible: no podemos decidir sobre la verdad o falsedad de esa fórmula o sentencia[23], que queda como indeterminada. Entonces el sistema es semánticamente incompleto.

---

22 Una teoría es el conjunto de las fórmulas deducibles verdaderas.

23 Una sentencia es un concepto de la lógica de predicados que exige que las variables de la fórmula estén ligadas (no sean libres) a un universo del discurso concreto. Estén ligadas a un conjunto de objetos bien precisado. Recordemos que en psicoanálisis no existe dicho universo del discurso.

Definamos ahora un poco mejor la *completud semántica* de un sistema. Un sistema es incompleto sintácticamente si al menos alguna fórmula o sentencia no es decible en él[24]. Este *indecidible* a veces recibe el nombre de proposición o tesis indeterminada[25]. La única manera de hacerla verdadera es añadirla a los axiomas por decreto; el problema es que muchas veces hace al sistema inconsistente. Es el caso de la segunda negación de Aristóteles para la lógica modal alética, que Lacan recupera y añade al sistema. Esta segunda negación es definida como "no-del-todo", que nosotros escribimos así: $\widehat{\forall \chi}\, \Phi X$, escrita de esta forma para diferenciarla de la aristotélica clásica[26], $\overline{\forall X}\, \Phi X$, con la cual no tiene nada que ver. Aristóteles la rechazó justamente por hacer inconsistente a su sistema. Entiendan bien la definición. Si en un sistema formal toda proposición se puede deducir,

[24] No todo se puede deducir y por tanto no es posible decidir si es válida o no.

[25] Es lo que utilizará Lacan más adelante en la lógica de predicados, aplicado a la función fálica.

[26] El problema es que Lacan las escribe igual, aunque indica en *L'étourdit* que sus fórmulas no tienen uso alguno en matemáticas.

es decir se puede demostrar su verdad, es un sistema que permite cualquier cosa, y por eso no puede ser consistente. Es necesario que algo no se pueda deducir, sea como verdadero o como falso.

Muy atentos ahora, esto no es lo que Lacan indica con “no es escribible”. Una proposición o tesis que no es decible (en el sentido de decidible) quiere decir que puede ser hablada (decible en el sentido psicoanalítico) y de hecho puede ser escrita pero no demostrada su verdad. De ahí que una cosa es lo que no se puede escribir y por tanto está excluido de todos los dichos (hablado y escrito a la vez), xRy, y otra una ‘proposición o predicación’ de la función suplente de ella cuya verdad no puede demostrarse, una indeterminada.

Las lógicas de proposiciones y predicados son completas semánticamente pero no son sintácticamente completas. Es el primer problema para los lógicos cuando hacen metalógica[27]. Ahora recordemos el primer teorema de incompletud de Gödel: ningún sistema definido recursivamente (con cierta complejidad) puede ser a la vez consistente y semánticamente completo. Es decir, dado un lenguaje formal y un aparato deductivo, si

[27] No sólo lógica o teoría de conjuntos, que es de donde se obtiene de entrada en la obra de Lacan S(Ⱥ).

es consistente no es posible demostrar todas las fórmulas válidas. Evidentemente si es semánticamente fuerte debe ser sencillo. Si queremos que el sistema sea completo, entonces hay que renunciar a la consistencia.

Es lo contrario de lo que intentan nuestros analizantes. Ante la inconsistencia e incompletud del Otro, (Ⱥ), primero, en el caso del fantasma, quieren que sea consistente y entonces no es completo; la consecuencia es que haya tesis no validables (son las que lo cuestionan), y es lo que los puede llevar a demandar análisis[28]. Es el caso de los neuróticos. No tratamos el caso de la sexuación ahora. En las psicosis se vive en la inconsistencia absoluta, caso de los trastornos afectivos por no disponer de fantasma[29] además de la incompletud semántica. Los de la línea esquizo, además, están en la incompletud sintáctica absoluta lo que les leva la duda (aparentemente obsesiva) psicótica oscilante sobre la verdad de una tesis.

[28] Las otras alternativas son las múltiples terapias que intentarán volverlo consistente de nuevo.

[29] El fantasma es consistente pero no semánticamente completo. Por eso toda teoría es fantasma según Lacan. Toda realidad es fantasma. Lo que no quiere decir que el fantasma y la realidad sexual sean lo mismo.

Ahora saquemos más conclusiones. Primero recordamos el segundo teorema de inconsistencia de Gödel. Un sistema formal de suficiente complejidad no puede demostrar su consistencia con las tesis de dicho sistema, es decir se necesita uno de más complejidad para hacerlo. Esto nos sitúa en una especie de huida hacia adelante de forma que cada teoría-sistema necesita una superior para asegurarse la consistencia. Éste de nuevo necesita usar una que no se sabe si lo es a menos que, a su vez, utilicemos otro más potente todavía. Es el mayor cuestionamiento del estructuralismo que puede haber[30]. No hay estructura a menos que se excluya alguna tesis y además al objeto @. Esto creemos que fue lo que hizo entender a Lacan que con el estructuralismo no había deseo alguno ni posibilidad de salir de la edad de piedra o de monos parlanchines. Si no lo pensó Lacan, lo pensamos nosotros. Es gracias a esa imposibilidad de que ninguna estructura se cierre por lo que existe avance en el deseo.

---

[30] Situar a Lacan como estructuralista fue un gran error. Él usa el estructuralismo pero castrado, lo que no es lo mismo. Una vez más nos preguntamos dónde está la castración en la topología.

Ya no se trata sólo, como captó al principio, de que los números reales no estén completos para satisfacer todas las raíces de una ecuación[31], o que las clases y los conjuntos no sean lo mismo, tal como captó con Frege y Russell, sino que no existe el metalenguaje. Es una tesis más fuerte que el significante no puede significarse a sí mismo. Si una estructura pudiese cerrarse sobre sí misma y hacer además de metalenguaje de otra, tal como desea la ciencia, no habría deseo alguno. Ésta es la verdadera lectura que debemos hacer ahora de Ⱥ. Ésta es la incompletud a nivel sintáctico (o retórica[32] si quieren) del psicoanálisis, así como el universo de la falta es su incompletud semántica. Por eso hay que ir con mucho cuidado con la topología porque aún no le hemos visto su falta y no debe ser un metalenguaje.

El paso siguiente que da Lacan es construir un significante, que será particular en cada uno, que nos permita subjetivizar, vía escritura únicamente, esa falta en todos los niveles que sea necesario. Este significante lo denominó el significante de una falta en el Otro y

[31] Teorema fundamental del álgebra.

[32] Sustituciones de la Lógica Combinatoria sobre la lógica sintáctica. No se puede deducir en cada subestructura “el teorema del sujeto”. Sea como verdadero o falso o tuti cuanti.

lo escribió así: $S(\not{A})$. Un significante que permite parar la búsqueda inmisericorde de un metalenguaje que responda ante la falta detectada. Un significante que quedará doblado por el objeto @ como pérdida. Ello debido a que por mucho que se siga significando, algo se escapa siempre. Significante cuya ausencia o forclusión deja al sujeto sin poder situar ese objeto-pérdida que a su vez presentifica metonímicamente (pero de forma objetal y no significantemente) a la muerte. El sujeto no puede nombrar nada y en consecuencia sólo le queda "el ser". Ésa es la operación que Freud detecta como "*la sombra del objeto ha caído sobre el Yo*". La operación nombrar no es la operación representar como un signo un objeto. Necesita ese significante, de lo contrario sólo representa vía signo y el sujeto no se representa así. Es lo que Lacan explica en *Subversión del sujeto…* Lo hace de una forma un poco alambicada. Lo plantea siendo este significante la solución de la operación nombrar. Lacan plantea en ese escrito la falta a nivel de los números y sus dificultades en el álgebra, y no con las clases y conjuntos. Resulta que nombrar tiene como consecuencia la obtención de $S(\not{A})$. Es decir, si no está no se podría nombrar. Alambicada, hemos dicho, porque la condición para la operación es el significante -1[33] y no el significante de la falta. Tal como lo plantea en ese escrito, el sujeto, no podría concluir la operación nombrar por no disponer de dicho significante porque es en el acto de nombrar donde lo escribe. También podemos verlo dualmente, justamente no puede nombrar por no disponer de dicho significante y entonces es cuando el objeto (la otra cara de la falta, *la manque*) es lo único que queda. Cuando Lacan dice que un neurótico es un sin nombre debemos entenderlo como que puede nombrarse con el trabajo analítico. El melancólico no podrá jamás, de ahí que sólo hable de su ser.

Recordamos, Lacan explica esta falta, desde los seminarios *De un Otro al otro* y *Encore* y su nueva definición de la cadena significante, desde el punto de vista de las cadenas y no ya las clases, ni conjuntos, ni números.

---

[33] El significante que marca la imposibilidad de cerrar el sistema en ese momento. Un significante incontable que estallará mas tarde, cuando hace clase su nueva topología de la cadena significante en *Encore,* en el enjambre de los S_1.