

# Las dos maneras de presentar una lógica. Caso de la de enunciados o proposiciones

## 1.1 Presentación de forma semántica

Dado el conjunto de todos los enunciados posibles,  $E(X)$ , se construye una **valoración** de ellos. Es decir se dice de cada uno si es verdadero o falso. Es una aplicación entre el conjunto de los enunciados y el conjunto de valores de verdad  $V(Y)$ , que tiene dos elementos. Escrito así:

$$V: E(X) \rightarrow V(Y) \\ X \rightarrow F \text{ ó } V$$

Ahora podemos pensar en el conjunto de todas las valoraciones distintas que podemos hacer de  $E(X)$  y lo denominamos el conjunto de valoraciones, o mundos posibles,  $\mathcal{V}(X)$ . Es una semántica porque a cada enunciado se le ha dado un significado, su valor de verdad. Y se dan dos definiciones básicas:

- Consecuencia.** Cuando en todas las valoraciones posibles, si un subconjunto de enunciados,  $E_k = \{E_1, E_2, E_3, E_4, \dots, E_n\}$  es verdadero y también lo es el enunciado  $E_j$ , se dice que  $E_j$  es una consecuencia de  $E_k$ .
- Validez.** Si un enunciado  $E_h$  es siempre verdadero en todas las valoraciones se dice que es un enunciado válido y se le denomina una **tautología**.
- Al conjunto  $E_k$  se le suele llamar conjunto de las hipótesis.

La consecuencia se escribe así:  $E_j \models E_k$

Y en el caso de una tautología podemos escribirla así:  $\emptyset \models E_h$ . Se escribe así porque una tautología no necesita que ninguna hipótesis sea verdadera para serlo ella, y por tanto es **válida**.

## 1.2 Presentación en forma sintáctica (axiomática)

Se dan por supuestos de nuevo todos los enunciados o proposiciones, pero no se los valora de entrada; si acaso se dan por supuestas dichas valoraciones. Entonces se parte de construir más una lógica deductiva que de definir los enunciados. Se trata de partir de un pequeño grupo finito de enunciados que se consideran verdaderos siempre y en todo caso. Se los denominan **axiomas**, ya que el término "postulado" ha caído en desuso<sup>1</sup>. Es desde ellos, añadiendo una regla de deducción, una como mínimo, desde donde podrán

---

<sup>1</sup> Aunque nosotros mantenemos la diferencia entre "postulado" y lo que funciona como un axioma. El postulado no se explicita en la axiomatización pero se usa: por ejemplo: una recta está formada por puntos. Es como los  $S_1$  al saber, están presentes en cada paso. Por ejemplo, el postulado de designación, los valores de verdad designados, el 1 de verdadero en las lógicas bivalentes, debe estar tanto en las premisas como en la conclusión. No es un axioma pero es un postulado de partida. Esta cuestión de la designación la veremos con más detalle cuando abordemos las lógicas paraconsistentes.

después derivarse otras más operativas según las deducciones que se efectúen. Entonces de la verdad de los axiomas, verdad decidida a priori<sup>2</sup>, y mediante la **regla de deducción** se deberán obtener para todos los enunciados, o eso se desea, si son verdaderos o falsos. A ese proceso se le denomina una deducción o una demostración cuando son lógicas más elaboradas. Luego tenemos dos conjuntos mucho más pequeños. El conjunto A de los axiomas y el conjunto R de la regla o reglas de deducción.

Definamos con más precisión lo que es una **deducción**. Supongamos que queremos demostrar que  $P_i$  es verdadero o falso. Partimos de los axiomas y en su caso de otro conjunto de enunciados, las (de nuevo) denominadas hipótesis, que consideramos que son verdaderas por el motivo que sea. Dicho conjunto lo denominaremos  $H=\{H_1, H_2, \dots, H_n\}$ . Una deducción es partir de los axiomas que necesitemos y las hipótesis y mediante la implicación material ir encajando, al modo de las ecuaciones matemáticas, los segundos términos de cada implicación con otra implicación en la que es el primer término. O dicho de otra manera, el **consecuente** de una implicación es **antecedente**<sup>3</sup> de la siguiente. Suele diferenciarse la presentación de la regla de deducción si se pone como silogismo (al modo de Aristóteles) o como un implicador; como implicador es más eficaz y productiva. De modo que partiendo de las verdades de axiomas e hipótesis y con la implicación o regla deductiva podemos acabar con una implicación que tiene como consecuente a  $P_i$ . En consecuencia  $P_i$  es deducible de los axiomas más las hipótesis. Se suele decir que el conjunto de las hipótesis **implican sintácticamente** a nuestro enunciado, y se escribe así:  $H_n \vdash P_i$ .

Actualmente se utiliza también el término de consecuencia, que habíamos utilizado para la presentación semántica, para la deducción sintáctica. De modo que, si puede dar pie a confusión, se debe aclarar si es consecuencia semántica o consecuencia sintáctica, que es como definimos ahora la deducción.

Hacemos notar que Freud añade al Inconsciente la negación, y que Lacan, además de plantear varias, añade un implicador concreto para el psicoanálisis.

Ahora dos definiciones:

- a) Si un enunciado es deducible o demostrado verdadero con unas hipótesis pero no con otras, se dice que es un enunciado consistente.
- b) Si un enunciado es deducible (demostrable) solo con los axiomas sin utilizar ninguna hipótesis, entonces se le define como un teorema. Luego un teorema se escribe así:  
 $\emptyset \vdash P_i$ .

---

<sup>2</sup> El conjunto de axiomas definen un mundo posible y las hipótesis un subgrupo de cada uno de ellos. Al principio no se veía que los axiomas eran un mundo posible sino el mundo único.

<sup>3</sup> Lacan a veces utiliza los términos griegos "prótasis" y "apodosis". Pero no diferencia nunca si es consecuencia o deducción.

### 1.3 Ampliación a la lógica de predicados

Ahora el conjunto de enunciados o proposiciones se nos divide en dos conjuntos: el de los predicados y el de los objetos a los que aplican. Este último se denomina **universo del discurso** y al primero el de las **notas intensionales**. En el fondo se trata de entrar en la constitución del enunciado y no verlo como un todo indivisible. Queda mucho más claro que si las notas intensionales se unen a un objeto producen una extensión en la pasta del universo del discurso. De modo que una **fórmula**, como ahora es mejor definirlo, está formada, hasta la más mínima, por un predicado + un objeto. A veces al universo del discurso se lo denomina conjunto universal, pero es mejor no utilizarlo porque no deja de ser "nuestro" universal o universo, ya que sabemos, gracias a Russell, que el conjunto universal no existe.

Todas las definiciones que hemos visto para los enunciados siguen sirviendo aunque a veces hay que extenderlas (ampliarlas un poco). En particular, aparecen los cuantificadores. Es mejor denominarlos cuantores para no confundirlo con cantidades. Son  $\exists$ ,  $\forall$  y  $\emptyset$ .